

Analiza aperiodičnih signala

- Aperiodične signale i funkcije, koje predstavljaju električne likove ovih signala, možemo da predstavimo u obliku sume spektralnih komponenata primenom Furijeovog integrala u trigonometrijskom ili kompleksnom obliku.
- Kompleksan oblik Furijeovog integrala glasi:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ako sa $\underline{F}(\omega)$ označimo spektralnu karakteristiku:

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

za Furijeov integral ćemo dobiti izraz:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Ovaj izraz predstavlja sumu beskonačno velikog broja komponenata čije su kompleksne amplitude:

$$\underline{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \underline{F}(\omega) d\omega$$

a učestanosti dve susedne komponente koje se razlikuju za $d\omega$.

- Ovi izrazi se nazivaju direktna i inverzna Furijeova transformacija.
- Direktna Furijeova transformacija, tj. određivanje karakteristike $\underline{F}(\omega)$ direktnim uvođenjem izraza za $s(t)$ u prednji obrazac, može da se izvede samo u slučaju kada je $s(t)$ apsolutno integrabilna funkcija u granicama od $-\infty$ do ∞ ($\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt$ ima određenu i konačnu vrednost) i ako ispunjava Dirihleove uslove, tj. da je neprekidna u intervalima konačne dužine.

Skoro svi likovi aperiodičnih signala koji se koriste u telekomunikacijama, mogu se pogodnim pomeranjem koordinatnog početka dovesti na oblik

$$s(t) = 0 \quad \text{za} \quad t < 0$$

- te spektralna karakteristika postaje

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Dakle, ovaj izraz za direktnu Furijeovu transformaciju može uvek da se koristi.

- Ako vremenska funkcija, koja predstavlja lik signala $s(t)$, nije integrabilna u granicama $-\infty$ do ∞ , ovo znači da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) \neq 0$$

- Prema tome spektralna karakteristika ne može direktno da se dobije. Da bi ipak našli Furijeov integral i ovakvih funkcija, mi ćemo funkciju $s(t)$ pomnožiti činiocem $e^{-\sigma t}$, gde je $\sigma > 0$ i ne zavisi od t . Pod pretpostavkom da postoji takva vrednost za σ pri kojoj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\sigma t} s(t)| d\omega$$

$$s(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left\{ e^{-\sigma t} s(t) \right\}$$

konvergira, možemo da kažemo da je

- Direktna Furijeova transformacija sada dobija oblik:

$$\underline{F}(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} s(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

- Ovakav izraz ćemo koristiti i za određivanje spektralne karakteristike i za određivanje inverzne Furijeove transformacije. Na kraju, posmatramo izraz

$$s(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} e^{-\sigma t} s(t)$$

i određujemo izraze za spektralnu karakteristiku $\underline{F}(\omega)$, kao i za original funkcije $s(t)$.

- Ovako modifikovana Furijeova transformacija, gde smo sa $p = \sigma + j\omega$ obeležili kompleksnu učestanost, naziva se **direktna Laplasova transformacija**:

$$\underline{F}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} s(t) dt$$

- Ova transformacija je primenljiva na sve funkcije $s(t)$, samo ako one ispunjavaju Dirihleove uslove.

- Ako na naš lik $s(t)$ primenimo direktnu Laplasovu transformaciju i uzmemo $\lim_{\sigma \rightarrow 0}$ dobijamo direktnu Furijeovu transformaciju signala.
- Za Laplasove transformacije postoje već sređene tablice koje daju vezu između $\underline{F}(p)$ i $s(t)$.
- $\underline{F}(p)$ se naziva Laplasova transformacija vremenske funkcije $s(t)$, a $s(t)$ se naziva originalom.
- Najčešće Laplasove transformacije date su u sledećoj tabeli.

Original $s(t)$	Transformacija $S(p)$
1	$1/p$
t	$1/p^2$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$

Original $s(t)$	Transformacija $S(p)$
e^{at}	$\frac{1}{p+a}$
$t \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$(1-at)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$

Original s(t)	Transformacija S(p)
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$\sin(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \sin \varphi + \omega_0 \cos \varphi}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \sin \varphi - \omega_0 \cos \varphi}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$

- Spektralna karakteristika $\underline{F}(\omega)$ je kompleksna veličina:

$$\underline{F}(\omega) = |\underline{F}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

gde moduo spektralne karakteristike $|\underline{F}(\omega)|$ (amplitudska spektralna karakteristika) daje amplitude, a fazni ugao $\varphi(\omega)$ (fazna spektralna karakteristika) daje početne faze komponenti. Ove veličine su analogne sa $S_n = |S_n|$ i φ_n kompleksnog oblika Furijeovog reda.

- Rezultati dobijeni analizom signala preko Furijeove transformacije obično se daju sređeni u obliku spektralnih dijagrama – spektara.
- Pošto su komponente aperiodičnih signala na međusobnoj udaljenosti $d\omega$, te je ovaj spektar gust i zamenjuje se anvelopom.
- Često se amplitudski spektar crta u normalizovanom obliku

$$\left| \frac{F(\omega)}{F(0)} \right|$$

a na faznom spektru se unose fazni uglovi $\varphi(\omega)$ sa svojim znakom.

- U nekim opsezima učestanosti se menja znak spektralnih komponenata. Ova pojava se dešava na taj način što se u tom opsegu učestanosti fazni ugao $\varphi(\omega)$ poveća ili smanji za π .

Od faznih uglova $\varphi(\omega) > \pi$ odbacuje se ceo broj umnožaka veličine 2π , tj. $n \cdot 2\pi$, a uglovi $\varphi(\omega) > \pi$ se zamenjuju komplementarnim uglom koji čini dopunu do 2π , sa suprotnim znakom. Ove operacije ne menjaju spektralnu karakteristiku.

- Za fizički realne signale, gde je $s(t)=0$ za $t<0$, eksponencijalni oblik Furijeovog integrala prelazi u odgovarajući trigonometrijski oblik Furijeovog integrala:

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) (\cos \omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

- Ovo se može uraditi pod uslovom da je $F(\omega)$ parna funkcija, a $\varphi(\omega)$ neparna funkcija od ω , što je u praksi najčešći slučaj. Trigonometrijski oblik spektralne karakteristike glasi:

$$\underline{F}(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$$

gde su

$$\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt$$

$$\beta(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt$$

Odavde se dobija:

$$F(\omega) = \sqrt{\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}$$

■ Oblici spektralne karakteristike $\underline{F}(\omega)$ za razne $s(t)$:

1) ako je $s(t)$ funkcija parna po t imamo

$$\underline{F}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos \omega t dt$$

2) ako je $s(t)$ funkcija neparna po t imamo

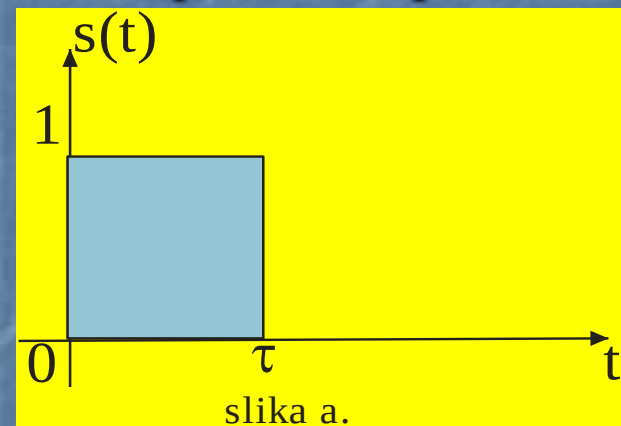
$$\underline{F}(\omega) = -j 2 \int_0^{\infty} s(t) \sin \omega t dt$$

i to bi bio imaginarni spektar.

- **Zadatak 1.** Primenom Furijeove transformacije odrediti spektralnu karakteristiku $\underline{E}(\omega)$ i nacrtati spektre:

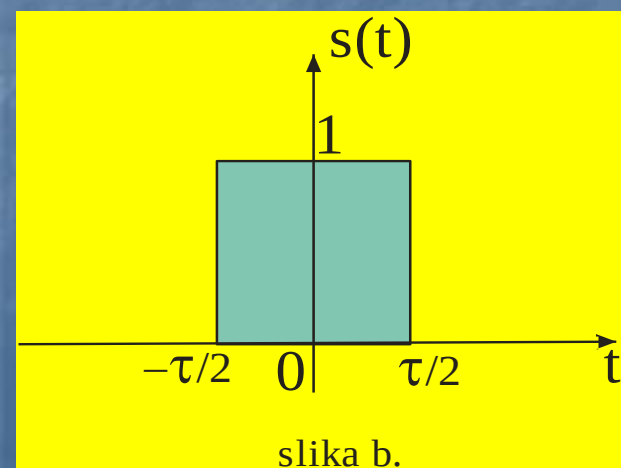
- a) usamljenog jediničnog impulsa, trajanja τ , prikazanog na slici a.
b) usamljenog jediničnog impulsa, trajanja τ , prikazanog na slici b.

Uporediti spektre ovih impusa.



a) U prvom slučaju imao:

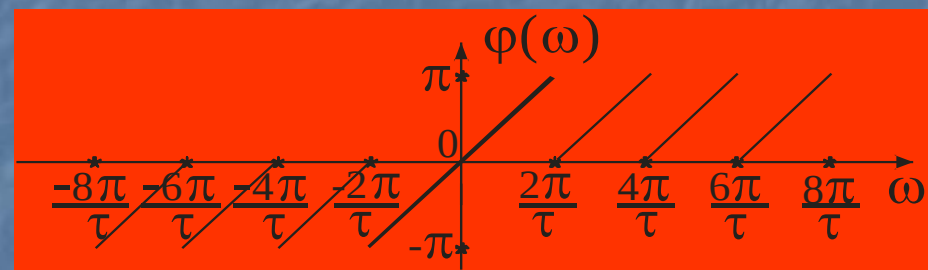
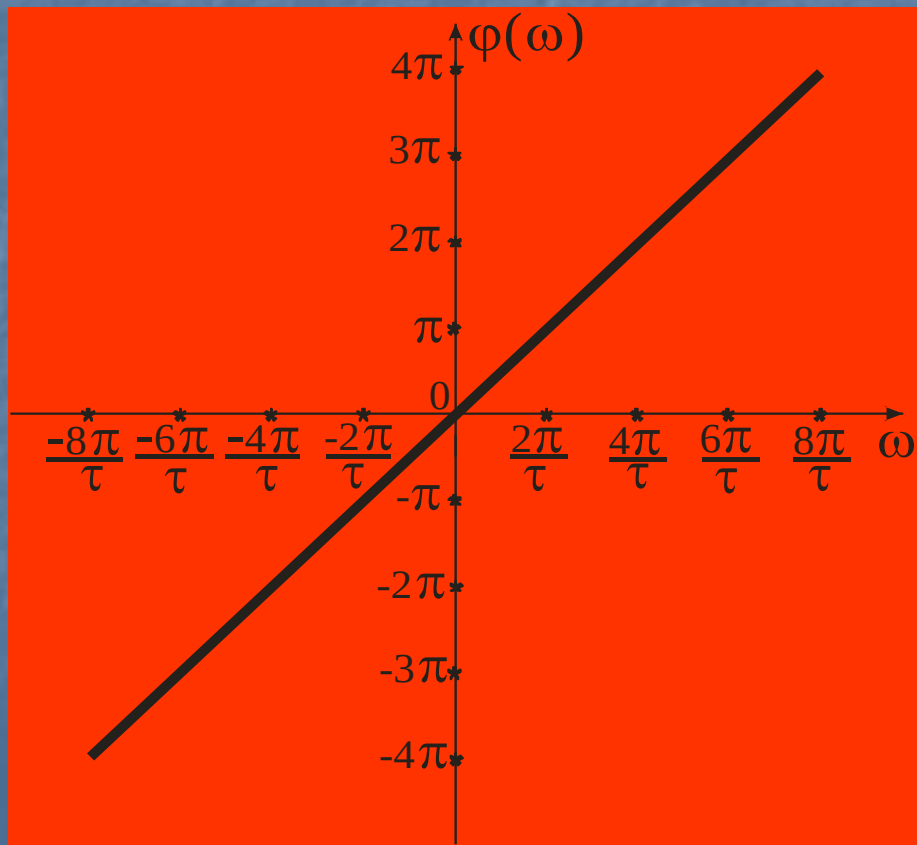
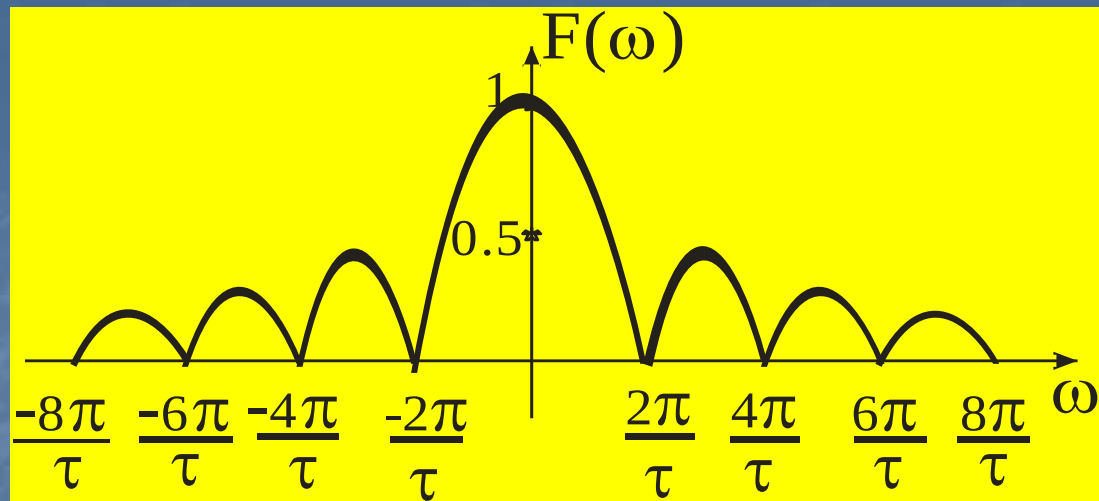
$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t \, dt = \int_0^{\tau} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^{\tau} = \\ &= \frac{1}{\omega} (\sin \omega \tau - \sin 0) = \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\beta(\omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t \, dt = - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin \omega t \, dt = \frac{1}{\omega} \cos \omega t \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{1}{\omega} (\cos \omega \tau - \cos 0) = \frac{1}{\omega} (\cos \omega \tau - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \sqrt{\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)} = \sqrt{\frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega\tau + \frac{1}{\omega^2} (\cos \omega\tau - 1)^2} = \\
 &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\sin^2 \omega\tau + \cos^2 \omega\tau - 2 \cos \omega\tau + 1} = \frac{1}{\omega} \sqrt{2 - 2 \cos \omega\tau} = \\
 &= \frac{1}{\omega} \sqrt{2 \sin^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) + 2 \cos^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) + 2 \sin^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)} = \\
 &= \frac{1}{\omega} \sqrt{4 \sin^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)} = \frac{2}{\omega} \sin \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{1}{\omega} (\cos \omega\tau - 1)}{\frac{1}{\omega} \sin \omega\tau} \right) = \\
 &= \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \frac{\omega\tau}{2}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{-2 \sin^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \frac{\omega\tau}{2}} \right) = \\
 &= \operatorname{arctg} \left(\frac{-\sin \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)}{\cos \frac{\omega\tau}{2}} \right) = \operatorname{arctg} \left(-\operatorname{tg} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \right) = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(-\frac{\omega\tau}{2} \right) \right) = -\frac{\omega\tau}{2}
 \end{aligned}$$



- b) U slučaju da se impuls posmatra kao parna funkcija dobijamo

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\sin \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) - \sin \left(-\frac{\omega \tau}{2} \right) \right) = \frac{2}{\omega} \sin \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(\omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin \omega t dt = \frac{1}{\omega} \cos \omega t \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\cos \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) - \cos \left(-\frac{\omega \tau}{2} \right) \right) = \frac{1}{\omega} \left(\cos \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) - \cos \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \right) = 0\end{aligned}$$

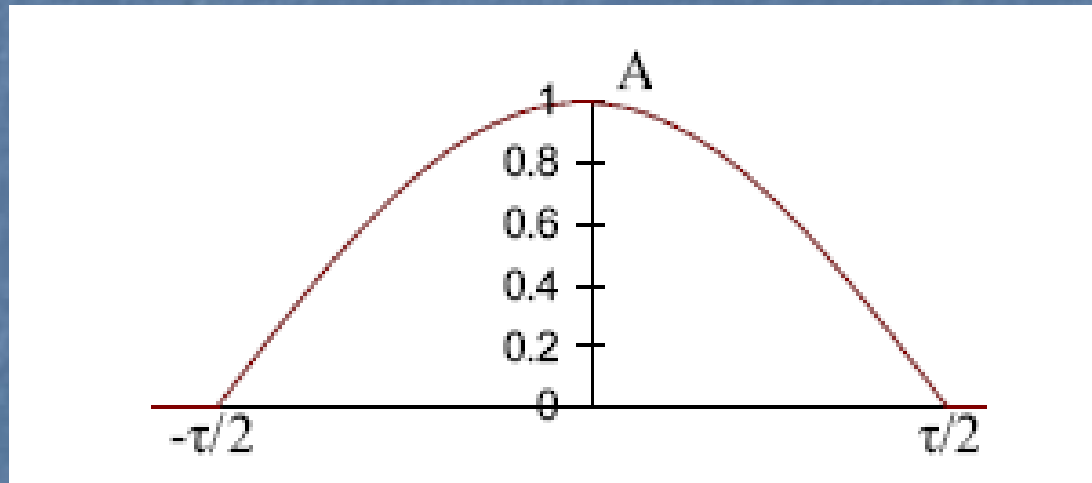
$$F(\omega) = \sqrt{\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)} = \sqrt{\frac{2^2}{\omega^2} \sin^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) + 0^2} = \frac{2}{\omega} \sin \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \arctg \left(\frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)} \right) = \\ &= \arctg \left(\frac{0}{\frac{2}{\omega} \sin \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)} \right) = \arctg(0) = 0\end{aligned}$$

- Amplitudski spektar je isti kao i u prethodnom slučaju, ali fazni spektar je jednak 0, što znači da su sve komponente u fazi.

- **Zadatak 2.** Odrediti spektar kosinusnog impulsa amplitude A i trajanja τ . Talasni oblik impulsa dat je sledećim analitičkim izrazom:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } -\infty < t < -\tau/2 \\ A & \text{za } -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{za } \tau/2 < t < \infty \end{cases}$$



- Furijeovu transformaciju kosinusnog impulsa možemo odrediti koristeći se osobinama parnih funkcija.

$$\underline{F}(j\omega) = F(\omega) = \alpha(\omega)$$

$$\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) \cos \omega t dt = 2A \int_0^{\tau/2} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) \cos \omega t dt =$$

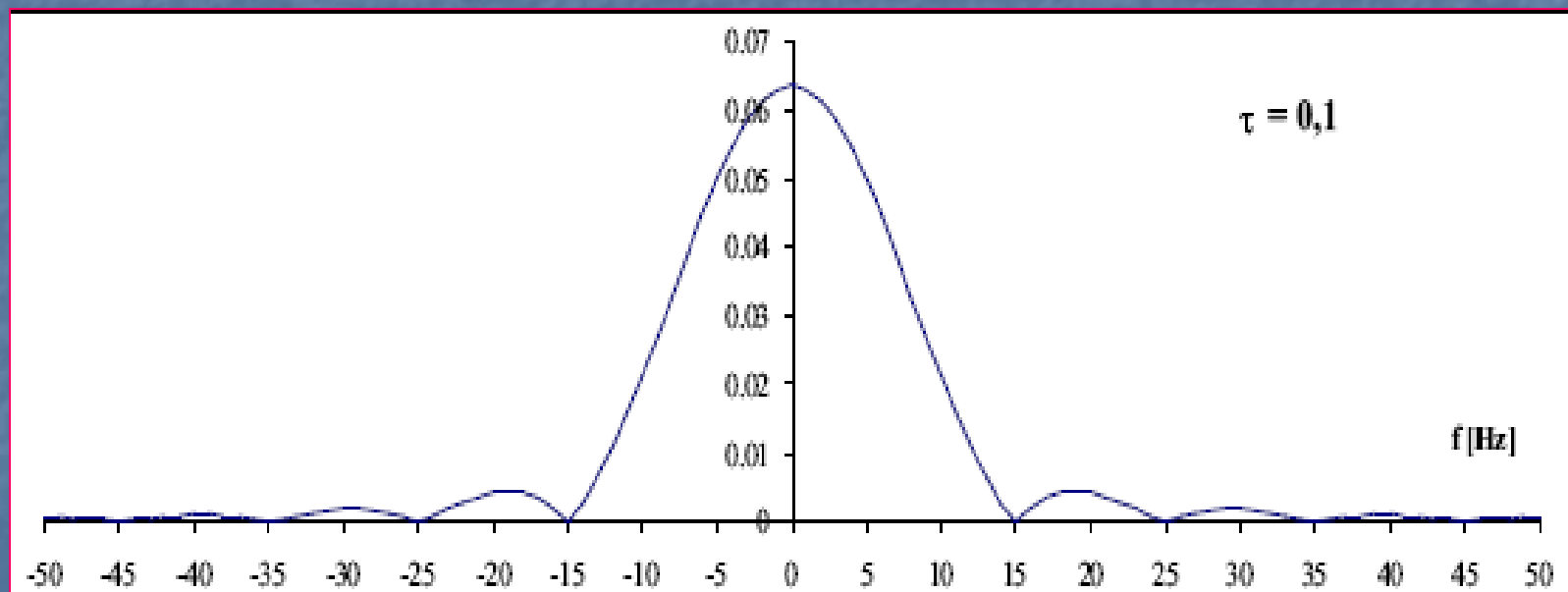
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha + \beta}{2} = \omega t \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{\tau} t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \left(\omega + \frac{\pi}{\tau} \right) t \\ \beta = \left(\omega - \frac{\pi}{\tau} \right) t \end{array} \right\} = A \frac{\sin\left(\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) \frac{\tau}{2}\right)}{\omega + \frac{\pi}{\tau}} + A \frac{\sin\left(\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right) \frac{\tau}{2}\right)}{\omega - \frac{\pi}{\tau}} =$$

$$= A \frac{\sin\left(\omega \frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\omega + \frac{\pi}{\tau}} + A \frac{\sin\left(\omega \frac{\tau}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{\omega - \frac{\pi}{\tau}} = A \frac{\cos\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)}{\omega + \frac{\pi}{\tau}} - A \frac{\cos\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)}{\omega - \frac{\pi}{\tau}} =$$

$$= A \cos\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \frac{\omega - \frac{\pi}{\tau} - \omega - \frac{\pi}{\tau}}{\omega^2 - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} = A \cos\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \frac{-2\frac{\pi}{\tau}}{\omega^2 - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} = 2 \frac{A\tau}{\pi} \frac{\cos\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2}$$

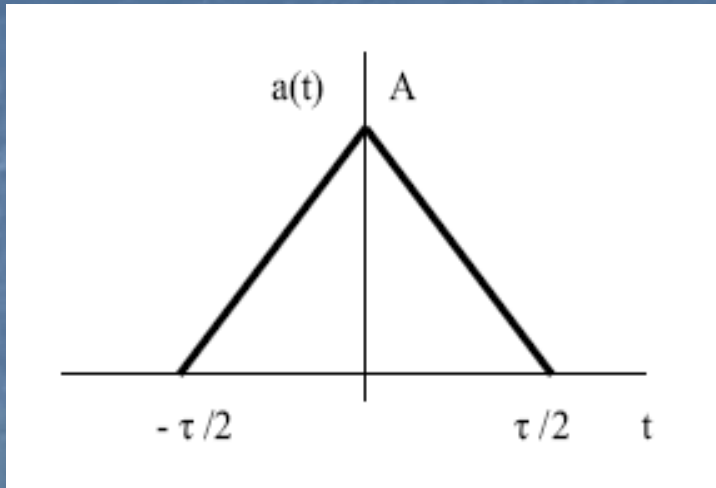
- Tablica karakterističnih tačaka Furijeove transformacije kosinusnog impulsa daje nam informaciju da je prva nula kosinusnog impulsa na učestanostima $3\pi/\tau$ i $-3\pi/\tau$.

ω	$-3\pi/\tau$	$-\pi/\tau$	0	π/τ	$3\pi/\tau$
f	$-3/(2\tau)$	$-1/(2\tau)$	0	$1/(2\tau)$	$3/(2\tau)$
$F(\omega)$	0	$A\tau/2$	$2A\tau/\pi$	$A\tau/2$	0



$$\tau=0.1 \text{ [s]}, A=1 \text{ [V]}$$

- **Zadatak 3.** Odrediti spektar trougaonog impulsa amplitude A i trajanja τ . Talasni oblik impulsa je dat izrazom:



$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } -\infty < t < -\tau/2 \\ A \left(1 + 2 \frac{t}{\tau} \right) & \text{za } -\tau/2 < t < 0 \\ A \left(1 - 2 \frac{t}{\tau} \right) & \text{za } 0 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{za } \tau/2 < t < \infty \end{cases}$$

- Za određivanje spektra trougaonog impulsa amplitude A i trajanja τ , možemo se koristiti i kompleksnim oblikom:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\{a(t)\} &= A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= A \int_{-\tau/2}^0 \left(1 + \frac{2}{\tau} t \right) e^{-j\omega t} dt + A \int_0^{\tau/2} \left(1 - \frac{2}{\tau} t \right) e^{-j\omega t} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(j\omega) &= A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt + \frac{2A}{\tau} \int_{-\tau/2}^0 t e^{-j\omega t} dt - \frac{2A}{\tau} \int_0^{\tau/2} t e^{-j\omega t} dt = \\
&= -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} + \frac{2A}{\tau} \frac{e^{-j\omega t}}{-\omega^2} (-j\omega t - 1) \Big|_{-\tau/2}^0 - \frac{2A}{\tau} \frac{e^{-j\omega t}}{-\omega^2} (-j\omega t - 1) \Big|_0^{\tau/2} = \\
&= -\frac{A}{j\omega} \left(e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2} \right) + \frac{2A}{\tau} \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{e^{j\omega\tau/2}}{\omega^2} \left(j\omega \frac{\tau}{2} - 1 \right) \right) - \frac{2A}{\tau} \left(-\frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{-j\omega\tau/2}}{\omega^2} \left(-j\omega \frac{\tau}{2} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{2A}{\omega} \left(\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j} \right) + \frac{4A}{\tau} \frac{1}{\omega^2} + \frac{2A}{\tau} \left(\frac{e^{j\omega\tau/2}}{\omega^2} \left(j\omega \frac{\tau}{2} - 1 \right) \right) + \frac{2A}{\tau} \left(\frac{e^{-j\omega\tau/2}}{\omega^2} \left(-j\omega \frac{\tau}{2} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{2A}{\omega} \sin \left(\omega \frac{\tau}{2} \right) + \frac{4A}{\tau} \frac{1}{\omega^2} + \frac{2A}{\tau} \frac{e^{j\omega\tau/2}}{\omega^2} j\omega \frac{\tau}{2} - \frac{2A}{\tau} \frac{e^{j\omega\tau/2}}{\omega^2} - \frac{2A}{\tau} \frac{e^{-j\omega\tau/2}}{\omega^2} j\omega \frac{\tau}{2} - \frac{2A}{\tau} \frac{e^{-j\omega\tau/2}}{\omega^2} = \\
&= A\tau \frac{\sin \left(\omega \frac{\tau}{2} \right)}{\omega \frac{\tau}{2}} + \frac{4A}{\tau} \frac{1}{\omega^2} + jA \frac{e^{j\omega\tau/2}}{\omega} - \frac{2A}{\tau} \frac{e^{j\omega\tau/2}}{\omega^2} - jA \frac{e^{-j\omega\tau/2}}{\omega} - \frac{2A}{\tau} \frac{e^{-j\omega\tau/2}}{\omega^2} = \\
&= A\tau \frac{\sin \left(\omega \frac{\tau}{2} \right)}{\omega \frac{\tau}{2}} + \frac{4A}{\tau} \frac{1}{\omega^2} + \frac{jA}{\omega} \left(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2} \right) - \frac{2A}{\tau \omega^2} \left(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2} \right) = \\
&= A\tau \frac{\sin \left(\omega \frac{\tau}{2} \right)}{\omega \frac{\tau}{2}} + \frac{4A}{\tau} \frac{1}{\omega^2} - \frac{2A}{j2\omega} \left(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2} \right) - \frac{2A}{\tau \omega^2} \left(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(j\omega) &= A\tau \frac{\sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)}{\omega \frac{\tau}{2}} + \frac{4A}{\tau} \frac{1}{\omega^2} - \frac{A\tau}{\omega \frac{\tau}{2}} \sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) - \frac{2A}{\tau\omega^2} \left(e^{j\omega\tau/2} + e^{-j\omega\tau/2}\right) = \\
 &= \frac{4A}{\tau} \frac{1}{\omega^2} - \frac{4A}{2\tau\omega^2} \left(e^{j\omega\tau/2} + e^{-j\omega\tau/2}\right) = \frac{4A}{\tau} \frac{1}{\omega^2} - \frac{4A}{\tau\omega^2} \cos\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) = \\
 &= A\tau \frac{4}{\omega^2 \tau^2} - A\tau \frac{4}{\omega^2 \tau^2} \cos\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) = \frac{A\tau}{\frac{\omega^2 \tau^2}{4}} - \frac{A\tau}{\frac{\omega^2 \tau^2}{4}} \cos\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) = A\tau \frac{1 - \cos\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)}{\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

- Tablica karakterističnih tačaka Furijeove transformacije kosinusnog impulsa daje nam informaciju da je prva nula kosinusnog impulsa na učestanostima $4\pi/\tau$ i $-4\pi/\tau$.

ω	$-4\pi/\tau$	0	$4\pi/\tau$
f	$-2/\tau$	0	$2/\tau$
$A(j\omega)$	0	$A\tau/2$	0

